Mathematisches Pendel / Mathematical pendulum

auf einen Punkt konzentrierte Massen mit masselosem, steifem Pendelarm

Masses concentrated on one point with massless, stiff pendulum arm

1. Anlass, Problem und Ziel:

Bei dem Bau von großen Uhren aus Holz nach den Plänen der beiden Uhrenbauer

- Brian Law
  [https://www.woodenclocks.co.uk/]
- Clayton Boyer
  [https://www.lisaboyer.com/Claytonsite/Claytonsite1.htm]

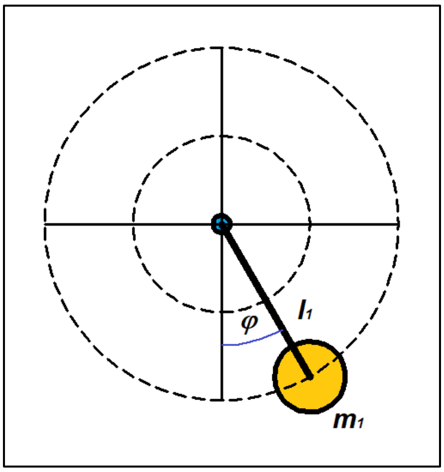
fällt auf, dass die Pendellängen häufig ziemlich lang sind (bis zu ca. 1m). Diese Pendel können näherungsweise als mathematische Pendel betrachtet und berechnet werden. Es steht nun die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt, die Pendellänge unterhalb der Pendelaufhängung zu reduzieren?
Wie gezeigt werden kann, ergibt sich durch das Anbringen einer zweiten Masse oberhalb des Drehpunktes die Möglichkeit, die Pendellänge unterhalb des Drehpunktes zu reduzieren.

1. Occasion, problem and goal:

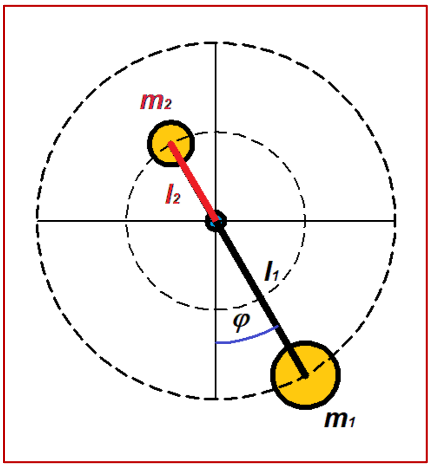
In the construction of large clocks from wood according to the plans of the both clockmaker

- Brian Law
  https://www.woodenclocks.co.uk/
- Clayton Boyer
  https://www.lisaboyer.com/Claytonsite/Claytonsite1.htm

it is noticeable that the pendulum lengths are very long (up to approx. 1m). These pendulums can be approximately regarded and calculated as mathematical pendulums. The question now is, whether there is a possibility to reduce the pendulum length below the pendulum suspension?
As can be shown, there is a possibility to reduce the length of the pendulum below the pivot point by attaching a second mass above the pivot point.



→



Um vorausschauend die Längen des Zwei-Massen-Pendels näherungsweise zu bestimmen, sollen in den folgenden Ausführungen die dazu erforderlichen Gleichungen für ein mathematisches Pendel mit zwei Massen abgeleitet werden. Ziel ist es, durch Vorgabe der Massenrelation m_2/m_1 und der Pendellängenrelation l_2/l_1

- und bei Vorgabe einer gewünschten Schwingdauer (Periode) T die Pendellänge l_1
- oder bei Vorgabe der Pendellänge l_1 die Schwingdauer T (Periode)

zu ermitteln.

Hinweis: Beim mathematischen Pendel wird das Steinerglied (Eigenträgheitsmoment) vernachlässigt.

In order to determine the lengths of the two-mass pendulum approximately, the equations required for a mathematical pendulum with two masses are to be derived in the following explanations. The aim is, by specifying the mass relation m_2/m_1 and the pendulum length relation l_2/l_1

- and by specifying a desired period of oscillation T the pendulum length l_1
- or, if the pendulum length l_1 is specified, the period of oscillation T (period)

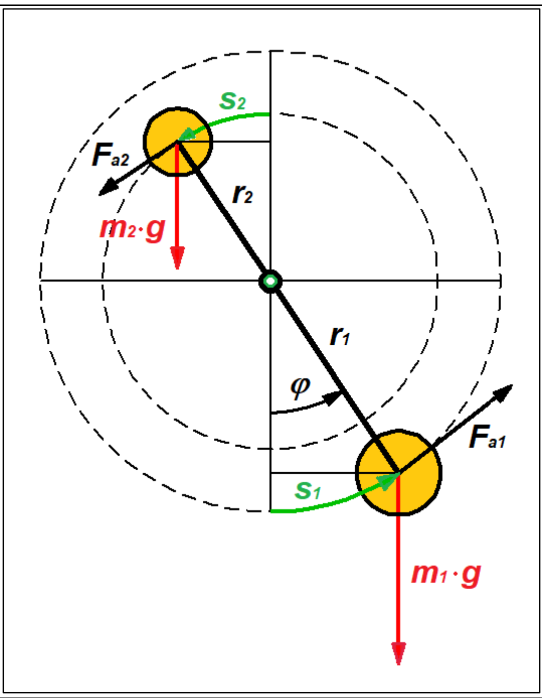
to be determined.

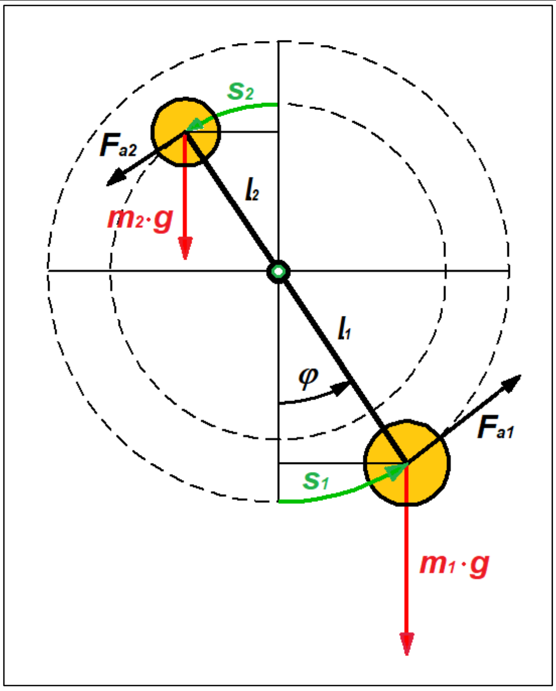
Note: In the case of the mathematical pendulum, the Steiner Term (moment of self-inertia) is neglected.

2. Verwendete Zeichen und Symbole / 2. Signs and symbols used

Zeit	time	t [s]	
Winkellage der Massen	Angular position of the masses	φ [rad]	
Erdbeschleunigung	Acceleration due to gravity	$g\ [m/s^2]$	
Schwingungsdauer	Period of oscillation	$T\ [s]$	
Kreisfrequenz	circular frequency	$\omega\ [1/s]$	
		Unten / below_ $\boldsymbol{i = 1}$	**Oben / top** $\boldsymbol{i = 2}$
Punktmasse	Point mass	$m_1\ [kg]$	m_2
Pendelarm (Radius)	Pendulum arm	$l_1\ [m]\ = r_1$	$l_2 = r_2$
Weg der Masse auf dem Kreisbogen	Path of the mass on the arc	$s_1\ [m]$	s_2
Umfangs-beschleunigung	Circumferential acceleration	$a_1\ [m/s^2]$	a_2
Tangentialkraft	Tangential force	F_{a1}	F_{a2}
Gewichtskraft	Weight force	$m_1 \cdot g$ [N]	$m_2 \cdot g$
Moment infolge Tangentialkraft	Moment due to tangential force	M_{a1}[Nm]	M_{a2}
Moment infolge Gewichtskraft	Moment due to weight force	M_{g1}[Nm]	M_{g2}

3. Physikalisch-mathematisches Modell / Physical-mathematical model





Umfangskraft Circumferential force	$F_{a1} = a_1 \cdot m_1$	$F_{a2} = a_2 \cdot m_2$
	$M_{1a} = m_1 \cdot a_1 \cdot l_1$	$M_{2a} = m_2 \cdot a_2 \cdot l_2$
Umfangsbeschleunigung circumferential acceleration	$a_1 = \dfrac{d^2 s_1}{dt^2}$	$a_2 = \dfrac{d^2 s_2}{dt^2}$
Moment infolge Umfangsbeschleunigung Moment due to circumferential acceleration	$M_{1a} = m_1 \cdot l_1 \cdot \dfrac{d^2 s_1}{dt^2}$	$M_{2a} = m_2 \cdot l_2 \cdot \dfrac{d^2 s_2}{dt^2}$

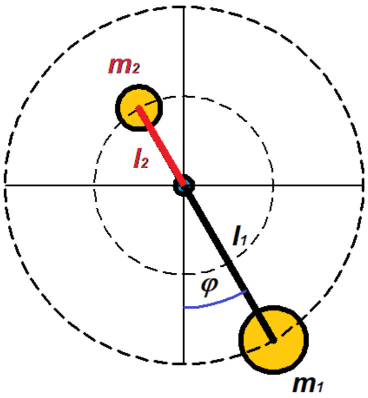
Allgemein General	$s_i = l_i \cdot \varphi \rightarrow \frac{ds_i}{dt} = l_i \cdot \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{ds_i^2}{dt^2} = l_i \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	
Moment infolge Umfangsbeschleunigung Moment due to circumferential acceleration	$M_{1a} = m_1 \cdot l_1^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	$M_{1a} = m_2 \cdot l_2^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Gewichtskraft Weight force	$-m_1 \cdot g$	$-m_2 \cdot g$
Hebel der Gewichtskraft Weight force lever	$l_1 \cdot sin\varphi$	$-l_2 \cdot sin\varphi$
Moment infolge des Gewichts Moment due to the weight	$M_{1g} = -m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot sin\varphi$	$M_{2g} = +m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot sin\varphi$
Momentengleichgewicht Equilibrium of moments	$M_{1a} + M_{1g} + M_{2a} + M_{2g} = 0$	
	$+m_1 \cdot l_1^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m_1 \cdot g \cdot rl_1 \cdot sin\varphi + m_2 \cdot l_2^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot sin\varphi = 0$	
Für kleine Winkel gilt For smal angles applies	$sin\varphi \approx \varphi$	
	$+m_1 \cdot l_1^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_2 \cdot l_2^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = +m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot sin\varphi - m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot sin\varphi$	
	$+(m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_2^2) \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (m_1 \cdot l_1 - m_2 \cdot l_2) \cdot g \cdot \varphi$	
Lösungsansatz Solution approach	$\varphi = \varphi_o \cdot \sin(\omega t + C)$ $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_o \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + C)$ $\frac{d\varphi^2}{dt^2} = -\varphi_o \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + C)$	
Momentengleichgewicht Equilibrium of moments	$-(m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_2^2) \cdot \varphi_o \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + C) = -(m_1 \cdot l_1 - m_2 \cdot l_2) \cdot g \cdot \varphi_o \cdot \sin(\omega t + C)$	
	$(m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_2^2) \cdot \omega^2 = +m_1 \cdot g \cdot l_1 - m_2 \cdot g \cdot l_2$	
Lösung Solution	$\omega^2 = \frac{m_1 \cdot g \cdot l_1 - m_2 \cdot g \cdot l_2}{(m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_2^2)} = \frac{g}{l_1} \cdot \left[\frac{1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2}{l_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2}}\right]$	
Kreisfrequenz Circular frequency	$\omega\,[1/s] = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2}{l_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2}}}$	
Schwingungsdauer Period of oscillation	$T\,[s] = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2}}{1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2}{l_1}}}$	
Länge des Pendels (unten) Length of the pendulum (bottom)	$l_1[m] = T^2 \cdot \frac{g}{4 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2}{l_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2^2}{l_1^2}}$	labil wenn $\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{l_2}{l_1} \geq 1$

Beim Zwei-Massen-Pendel haben sowohl die Massenrelation $\frac{m_2}{m_1}$ als auch die Längenrelation $\frac{l_2}{l_1}$ Einfluss auf die Schwingdauer T.

In the two-mass pendulum, both the mass relation $\frac{m_2}{m_1}$ and the length relation $\frac{l_2}{l_1}$ have an influence on the period of oscillation T.

↓

4. Auswertung und Schlussfolgerungen / Evaluation and conclusions



Das sind die bereits vorher berechneten Ergebnisse:
In der Betrachtung [siehe Abbildung] sind die Pendellängen l_1 und l_2 entgegengesetzt gerichtet. Beide gehen mit einem positiven Vorzeichen $(+)$ in die Berechnung ein.
These are the results already calculated before:
In the observation [see figure], the pendulum lengths l_1 and l_2 are directed in opposite directions. Both enter the calculation with a positive sign (+).

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}}} \quad , \quad l_1 = T^2\cdot\frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\frac{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}$$

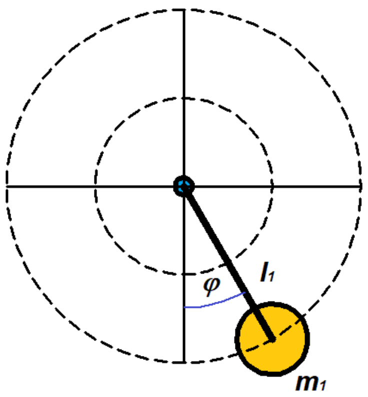
Oder / or

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{|l_2|}{|l_1|}}} \quad , \quad l_1 = T^2\cdot\frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\frac{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{|l_2|}{|l_1|}}{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}$$

stabil	Labil *)
$m_2\cdot l_2 \le m_1\cdot l_1$	$m_2\cdot l_2 \ge m_1\cdot l_1$
$\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1} \le 1$	$\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1} \ge 1$

*) Das Pendel dreht sich um 180° in die stabile Lage,
das bedeutet: $m_1 \to m_2$ und $l_1 \to l_2$ und umgekehrt
*) The pendulum turns 180° to the stable position,
that means: $m_1 \to m_2$ and $l_1 \to l_2$ and vice versa

Beispiel Example	l_1	l_2	m_1	m_2	$T\ [s]$
	0,50	+0,30	0,52	0,33	**2,016**



Wird die Masse m_2 in den Drehpunkt des Pendels verschoben, so ist die Länge $l_2 = 0$.
If the mass m_2 is moved to the centre of rotation of the pendulum, the length $l_2 = 0$.

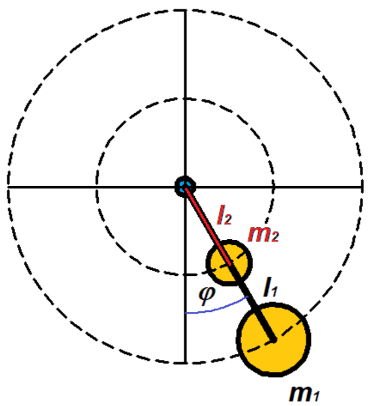
$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}}}}_{=1} \quad , \quad l_1 = \frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot T^2\cdot\underbrace{\frac{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}}_{=1}$$

Das ergibt dann die allgemein bekannte Formel für das **Ein-Massen-Pendel**:
This then gives the generally known formula for the one-mass pendulum:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad , \quad l_1 = \frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot T^2$$

Beispiel Example	l_1	l_2	m_1	m_2	$T\ [s]$
	0,50	0	0,52	0,33	**1,419**

Beim Ein-Massen-Pendel hat die Masse m_1 keinen Einfluss auf die Schwingdauer T !
With the single-mass pendulum, the mass m_1 has no influence on the period of oscillation T !



Wird die Masse m_2 über den Drehpunkt des Pendels hinaus in Richtung l_1 verschoben, so geht die Länge l_2 *mit* negativem Vorzeichen (-) in die Berechnung ein.
If the mass m_2 is shifted beyond the centre of rotation of the pendulum in the direction of l_1, the length l_2 enters the calculation with a negative sign (-).

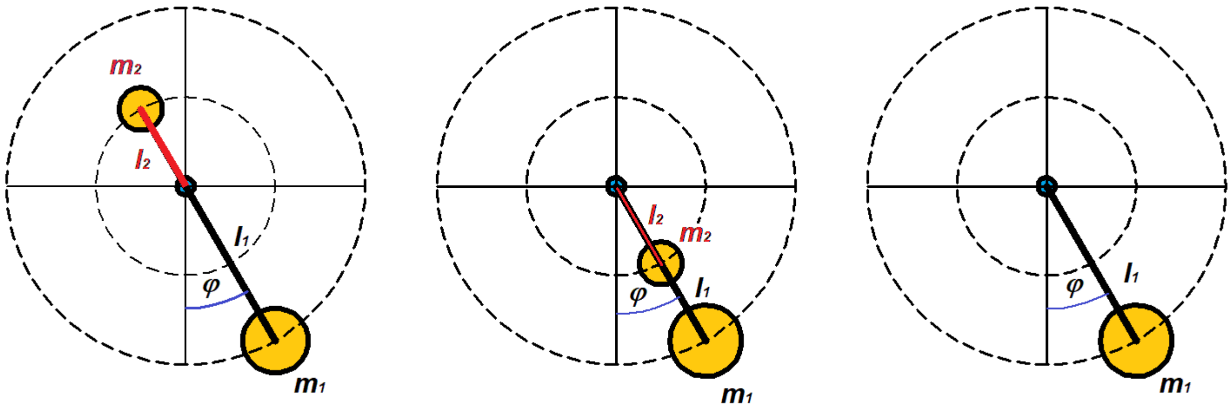
$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}}} \quad , \quad l_1 = \frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot T^2\cdot\frac{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2}{l_1}}{1-\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}$$

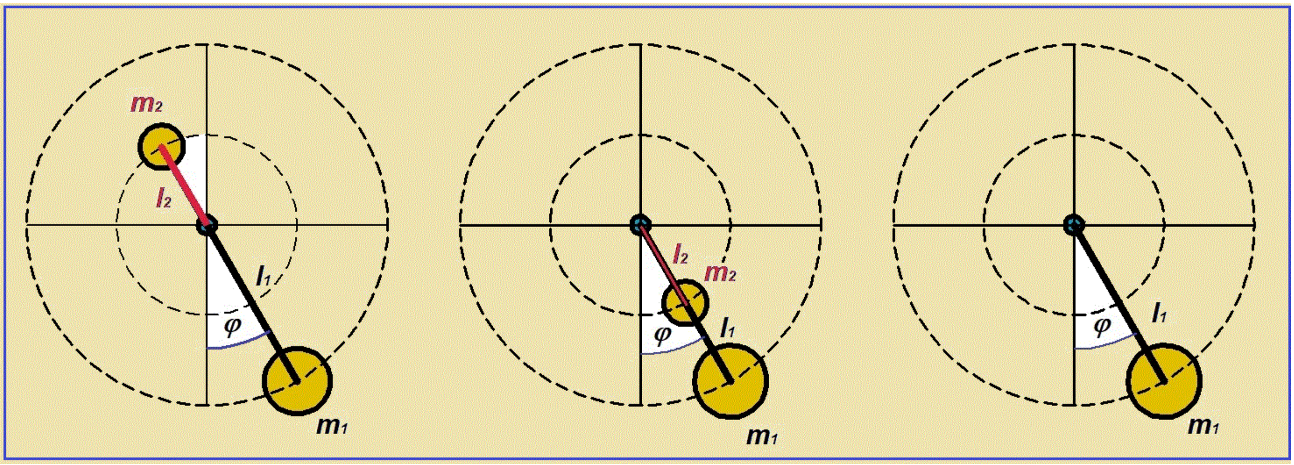
oder

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{|l_2|}{|l_1|}}} \quad , \quad l_1 = T^2\cdot\frac{g}{4\cdot\pi^2}\cdot\frac{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{|l_2|}{|l_1|}}{1+\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{l_2^2}{l_1^2}}$$

Beispiel Example	l_1	l_2	m_1	m_2	$T\ [s]$
	0,50	-0,30 |0,30|	0,52	0,33	**1,350**

Reserve


m_2
l_2
l_1
φ
m_1
l_2
m_2
l_1
φ
m_1
φ
l_1
m_1


m_2
l_2
l_1
φ
m_1
l_2
m_2
l_1
φ
m_1
φ
l_1
m_1